NOMS Prénoms des élèves du groupe :

-
-
-
-

Travail de groupe n^o 3

1 heure

	Exercice 1	Exercice 2 -Partie A	Exercice 2 -Partie B	Figure	Tenue du groupe	BONUS
Total	5	5	7	2	1	2

Exercice 1

Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = -5 + 5i$ **2.** $z_2 = (\sqrt{3} - 3i)^4$ **3.** $z_3 = (-i + 1)(1 + i\sqrt{3})$

Exercice 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives 2 et -2 et on définit l'application f qui, à tout point M d'affixe z et différent de A, associe le point M' d'affixe :

$$z' = \frac{\overline{z}(z-2)}{\overline{z}-2}$$

Partie A

1.(a) Déterminer l'affixe du point P' image par f du point P d'affixe $1 + \mathrm{i}$.
 (b) Montrer que les droites (AP) et (BP') sont parallèles.
 (c) Établir que les droites (AP) et (PP') sont perpendiculaires.
2. Déterminer l'ensemble des points invariants par f (c'est-à-dire l'ensemble des points M tels que M' et M sont confondus).

Partie B

On cherche à généraliser les propriétés 1. (b) et 1. (c) de la partie A pour obtenir une construction à la règle et au compas de l'image M' d'un point M quelconque du plan distinct de A.

1.(a) Montrer que pour tout nombre complexe z, le nombre $(z-2)(\overline{z}-2)$ est réel.
 (b) En déduire que pour tout nombre complexe distinct de 2, $\dfrac{z'+2}{z-2}$ est réel.
 (c) Déterminer l'ensemble des points M tels que M' et B soient confondus. Construire cet ensemble sur l'annexe mise au dos.
 (d) Déduire de la question (b) que, pour tout point M' différent de B, les droites (AM) et (BM') sont parallèles.
2. Soit M un point quelconque non situé sur la droite (AB). Généraliser les résultats de la question 1. (c) de la partie A.
3. Soit M un point distinct de A. Déduire des questions précédentes un programme de construction du point M' image de M par f (autrement dit, indiquer les étapes de la construction).
4. Construire le point Q d'affixe $3 - 2\mathrm{i}$ ainsi que Q' sur l'annexe mise au dos.

BONUS Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ix} e^{iky} = e^{\frac{i(x+ny)}{2}} \left(2\cos\left(\frac{y}{2}\right)\right)^n$.

En déduire la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(x + ky)$

Annexe de l'exercice 2